Fiche de Révision — Chapitre XII : Polynômes

Théorèmes, propriétés et astuces essentiels

1. Structure et degré

Propriété — Degré du produit et de la somme

Soient A un anneau intègre et $P, Q \in A[X]$.

- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ et $\mathrm{CD}(PQ) = \mathrm{CD}(P) \cdot \mathrm{CD}(Q)$
- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, avec **égalité** si $\deg P \neq \deg Q$, ou si $\deg P = \deg Q$ et $\mathrm{CD}(P)+\mathrm{CD}(Q) \neq 0$.

Astuce — Polynômes de Tchebychev

(T_n) définis par $T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Résultat : $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{CD}(T_n) = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$. Se démontre par **récurrence double**.

2. Dérivée et Formule de Taylor

Propriété — Dérivées successives

Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$, alors pour $k \leq n$:

$$P^{(k)} = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} a_i X^{i-k}, \qquad P^{(k)} = 0 \text{ si } k > n.$$

Théorème — Formule de Taylor

Pour tout $P \in K[X]$ de degré n et tout $a \in K$:

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k}$$

Corollaire : Les coefficients de $P = \sum a_k X^k$ vérifient $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

3. Division euclidienne et anneau principal

Théorème — Division euclidienne dans $K[X]$

Soient $A, B \in K[X]$ avec $B \neq 0$. Il existe un **unique** couple $(Q, R) \in K[X]^2$ tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Propriété — $K[X]$ est principal

Tout idéal I de $K[X]$ est principal. De plus, tout idéal non nul est engendré par un **unique polynôme unitaire** de degré minimal.

Propriété — Éléments inversibles de $K[X]$

$P \in K[X]$ est inversible $\iff \deg(P) = 0$, i.e. $U_{K[X]} = K^*$.

4. Racines

Propriété — Racine ⇔ divisibilité
$a \in K$ est une racine de $P \iff (X-a) \mid P$.

Conséquence — Racines distinctes
Si $a_1, \ldots, a_k$ sont des racines deux à deux distinctes de P, alors :

$$\prod_{i=1}^{k}(X-a_i) \mid P$$

Astuce — Borne sur le nombre de racines
Un polynôme de degré n admet **au plus** n **racines** dans K. Si P admet strictement plus de $\deg(P)$ racines (ou une infinité), alors $P = 0$.

5. Multiplicité d'une racine

Définition — Racine de multiplicité s
α est une racine de multiplicité s de P si $(X-\alpha)^s \mid P$ et $(X-\alpha)^{s+1} \nmid P$.

Propriété — Caractérisation par les dérivées
α est une racine de multiplicité s de $P \iff$

$$\forall k \in 0, s-1,\; P^{(k)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(s)}(\alpha) \neq 0.$$

Méthode : utiliser la formule de Taylor pour écrire $P = (X-\alpha)^s \cdot Q + R$.

Astuce — Lecture de la multiplicité
$s = \max\{k \in \mathbb{N} : (X-\alpha)^k \mid P\}$. Si $(X-\alpha)^m \mid P$, alors la multiplicité est $\geq m$.

6. Polynômes scindés et Formule de Viète

Définition — Polynôme scindé
$P \in K[X]$ est scindé dans $K[X]$ s'il existe $x_1, \ldots, x_n \in K$ (non nécessairement distincts) tels que $P = \mathrm{CD}(P)\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$, avec $n = \deg(P)$.

Propriété — Formules de Viète
Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est scindé de racines $x_1, \ldots, x_n$ (comptées avec multiplicité), on pose $\sigma_k = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} x_{i_1}\cdots x_{i_k}$.

$$\sigma_k = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Cas utiles :

- deg 2 : $x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$, $x_1x_2 = \frac{a_0}{a_2}$.
- deg 3 : $\sigma_1 = -\frac{a_2}{a_3}$, $\sigma_2 = \frac{a_1}{a_3}$, $\sigma_3 = -\frac{a_0}{a_3}$.

Astuce — Calcul de $\sum x_k^2$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

7. PGCD, PPCM et théorèmes d'arithmétique

Théorème — Identité de Bézout
$D = \mathrm{pgcd}(P_1, \dots, P_n) \implies \exists Q_1, \dots, Q_n \in K[X]$ tels que $D = \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i$.
Corollaire : $\mathrm{pgcd}(P_1, \dots, P_n) = 1 \iff \exists Q_i$ tels que $\sum P_i Q_i = 1$.

Théorème — Lemme d'Euclide (Gauss)

$$A \wedge B = 1 \text{ et } A \mid BC \implies A \mid C$$

Plus généralement : si $P_i \mid A$ pour tout i et les P_i sont premiers entre eux deux à deux, alors $\prod P_i \mid A$.

Théorème — Lemme d'Euclide pour le PGCD
Si $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$, alors $A \wedge B = B \wedge R$.
⇒ **Base de l'algorithme d'Euclide.**

Propriété — PGCD/PPCM et factorisation
Si $A = \mathrm{CD}(A) \prod P_i^{\alpha_i}$ et $B = \mathrm{CD}(B) \prod P_i^{\beta_i}$, alors :

$$A \wedge B = \prod_i P_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}, \qquad A \vee B = \prod_i P_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$$

Et : $(A \wedge B)(A \vee B) = \dfrac{1}{\mathrm{CD}(AB)} \cdot AB$.

Propriété — Polynômes premiers entre eux (sous-corps de $\mathbb{C}$)

$$P \wedge Q = 1 \iff P \text{ et } Q \text{ n'ont aucune racine commune dans } \mathbb{C}.$$

8. Polynômes irréductibles

Théorème — D'Alembert-Gauss
Tout polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Conséquence — Irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

- Dans $\mathbb{C}[X]$: les irréductibles sont exactement les polynômes de **degré 1**.
- Dans $\mathbb{R}[X]$: les irréductibles sont les polynômes de **degré 1** et les polynômes de **degré 2 à discriminant strictement négatif** ($\Delta < 0$).

Propriété — Conjugaison complexe

$$P \in \mathbb{R}[X] \iff \forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \overline{P(\bar{z})} = \overline{P(z)}.$$

Conséquence : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est racine de multiplicité s, alors $\bar{z}$ est aussi racine de multiplicité s.

Astuce — Polynôme de degré impair dans $\mathbb{R}[X]$
Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré **impair** admet au moins une racine réelle (TVI), donc est **réductible** dans $\mathbb{R}[X]$.

9. Décomposition primaire

Théorème — Décomposition en irréductibles
Tout $A \in K[X]$ de degré ≥ 1 s'écrit de façon **unique** (à permutation près) :

$$A = \mathrm{CD}(A) \cdot P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}$$

où $P_1, \ldots, P_r$ sont irréductibles **unitaires** deux à deux distincts et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Astuce — Forme explicite par corps

- **Dans** $\mathbb{C}[X]$: $A = \mathrm{CD}(A) \prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{\alpha_i}$, $x_i \in \mathbb{C}$.
- **Dans** $\mathbb{R}[X]$: $A = \mathrm{CD}(A) \prod (X - x_i)^{\alpha_i} \prod (X^2 + b_j X + c_j)^{\beta_j}$, avec $b_j^2 - 4c_j < 0$.

10. Interpolation de Lagrange

Définition — Polynômes de Lagrange
Pour $x_0, \ldots, x_n$ deux à deux distincts dans K :

$$l_k = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{X - x_j}{x_k - x_j} \in K_n[X], \qquad l_k(x_i) = \delta_{i,k}.$$

Théorème — Polynôme d'interpolation de Lagrange
L'unique polynôme $P \in K_n[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in 0, n$ est :

$$P = \sum_{k=0}^{n} y_k \, l_k$$

Théorème — Erreur d'interpolation
Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, l'erreur $e(x) = f(x) - P(x)$ vérifie :

$$\forall x \in [a,b], \ \exists \varepsilon_x \in [a,b], \quad e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Méthode de preuve : Rolle itéré (la fonction auxiliaire admet $n+2$ racines).